

I. Contrôle : 2006-2007

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_2) = e_1 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_3) = 2e_3 \end{cases} \quad \text{où } B = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^3$$

- 1/ Donner la matrice A de f dans la base B
- 2/ Soient $u = (-1, 1, 0)$; $v = (1, 1, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$
 - a/ Vérifier que $B' = \{u, v, w\}$ est une base de \mathbb{R}^3
 - b/ Donner la matrice P , de passage de B à B'
 - c/ Donner la matrice P^{-1}
- 3/ En déduire la matrice A' de f dans la base B'
- 4/ En déduire que A' est inversible
- 5/ Donner l'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}$

II. Contrôle : Rattrapage 2005-2006

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = \frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_2) = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3 \end{cases} \quad \text{où } B = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ base canonique de } \mathbb{R}^3$$

- 1/ Donner la matrice A de f dans B
- 2/ Soient $e'_1 = (1, 0, -1)$; $e'_2 = (1, 1, 0)$; $e'_3 = (1, 0, 1)$
vérifier que $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3
- 3/ Écrire $f(e'_1)$, $f(e'_2)$, $f(e'_3)$ dans la base B'
- 4/ En déduire la matrice A' de f dans B'
- 5/ Donner la matrice A' en utilisant la matrice P de passage de B à B'

III. Contrôle : 2006-2007

Exercice 1 : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_3 \\ f(e_3) = e_1 + 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

$B = (e_1, e_2, e_3)$
base canonique

- 1/ Donner 1 base de $\text{Ker } f$
- 2/ Donner 1 base de $\text{Im } f$
- 3/ A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$

Exercice 2 : E un K.e.v et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre p
càd $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$

1/ Il faut que : $\exists u \in E ; u \neq 0$ tel que la famille $B = \{ u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u) \}$ soit l.b.e

2/ En deduire que si $\dim E = p$ alors B est une base de E

3/ A-t-on $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$

Exercice 3 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1/ Montrer que M est inversible
2/ Calculer $M^{-1} - M - 2I$, en deduire de nouveau que M est inversible et calculer M^{-1}
3/ En deduire la solution du système $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=3 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

IV Contrôle 2007-2008

Exercice 2: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre 3 (c-à-d. $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$)

1/ Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, non nul tel que la famille $B = \{ u, f(u), f^2(u) \}$ soit une base de \mathbb{R}^3

2/ Ecrire la matrice de f dans B

V Exercice 1 Contrôle 07-08 et 03-04

On considère l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad f(x) = (x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2 + 5x_3) \quad B = (e_1, e_2, e_3) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^3$$

1/ Ecrire la matrice de f dans la base B

2/ Soit $u_1 = (1, 1, -1)$ $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3

a/ Vérifier que $B' = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ base de \mathbb{R}^3

b/ Ecrire la matrice P de passage de B à B'

c/ Calculer P^{-1}

d/ En deduire la matrice A' de f dans la base B'

3/ Calculer A'^n , $n \in \mathbb{N}$

4/ On considère 3 suites (U_n) , (V_n) et (W_n) définies par:

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} \\ V_n = -U_{n-1} + 2V_{n-1} \\ W_n = U_{n-1} + 3V_{n-1} + 5W_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \\ W_0 = 3 \end{cases}$$

Exprimer U_n , V_n et W_n en fonction de n .

I. Contrôle 06-07

$$1/ A = \pi(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2/ a/ \text{ Soient } \alpha, \beta, \gamma \text{ de } \mathbb{R} \text{ tels que } \alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0) \\ \alpha(-1, 1, 0) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Le système $B' = \{u, v, w\}$ est l.b.e

Or $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card } B'$ donc B' est une base de \mathbb{R}^3

$$b/ P = P(B \rightarrow B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c/ \det P = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad \text{Com } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{ Com } P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3/ A' = \pi(f, B') = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : A' est la matrice de f dans B' , c'est-à-dire les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B' dans B

$$4/ \text{ On a : } A' = P^{-1} A P \text{ d'où } A = P A' P^{-1} \text{ et on a :}$$

$$\det A = \det(P A' P^{-1}) = \det P \times \det A' \times \det P^{-1} = (-2)(-2)(-\frac{1}{2}) = -2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

$$5/ A^n = A \cdot A \dots A = (P A' P^{-1})(P A' P^{-1}) \dots (P A' P^{-1}) = P (A')^n P^{-1} \\ A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2(-1)^n & 1/2(-1)^n & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 \cdot 2^n & -1/2 \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/2(-1)^n + 1/2 & -1/2(-1)^n + 1/2 & 0 \\ -1/2(-1)^n + 1/2 & 1/2(-1)^n + 1/2 & 0 \\ -1/2 \cdot 2^n + 1/2 & -1/2 \cdot 2^n + 1/2 & 2^n \end{pmatrix}$$

II. Contrôle : Rattrapage 05-06

$$1/ A = \pi(f, B) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$2/ \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

B' est l.b.e et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card } B'$ alors B' est base de \mathbb{R}^3

$$3/ f(e_1') = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = e_1 - e_3 = e_1'$$

$$f(e_2') = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2 = e_2'$$

$$f(e_3') = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3) = 2e_1 + 2e_3 = 2e_3'$$

$$4/ A' = \pi(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5/ A' = P^{-1} A P \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \det P = 2 ; P^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } A' = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ Base de $\text{Ker } f$:

Posons M matrice de f dans B alors $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $(x, y, z) \in \text{Ker } f$ alors $f(x, y, z) = 0$; $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \xRightarrow{E_1 + E_3} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z - y + z = 0 \\ x = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -2z \end{cases}$$

d'où $(x, y, z) = (-2z, -z, z) = -z(2, 1, -1)$;

$B_1 = \{u_1 = (2, 1, -1)\}$ est 1 famille génératrice de $\text{Ker } f$ et comme $(2, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$ alors B_1 est base de $\text{Ker } f$

2/ Base de $\text{Im } f$: $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$

car $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$

De plus $u_2 = f(e_1) = (1, 2, 3)$ et $u_3 = f(e_2) = (-1, 0, 1)$ sont liés

$$(\alpha u_2 + \beta u_3 = (0, 0, 0)) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc $B_2 = \{u_2, u_3\}$ est base de $\text{Im } f$

$$3/. \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

Montrons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ et ainsi on aura : la somme directe

$$\text{Soit } (x, y, z) \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f \text{ alors } (x, y, z) = \alpha u_1 = (2\alpha, \alpha, -\alpha) \text{ et } (x, y, z) = \beta u_2 + \gamma u_3 = (\beta - \gamma, 2\beta, 3\beta + \gamma) \text{ alors } \begin{cases} \beta - \gamma = 2\alpha \\ 2\beta = \alpha \\ 3\beta + \gamma = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta - \gamma = 4\beta \\ 3\beta + \gamma = -2\beta \end{cases}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow 4\beta = 2\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0, 0, 0\}$$

Exercice 2 / on a $f^{p-1} \neq 0$ donc $\exists u \neq 0$ tel que $u \in E$ et $f^{p-1}(u) \neq 0$

Considérons les scalaires a_0, a_1, \dots, a_{p-1} tels que :

$$a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$$

Appliquons à ce vecteur l'endomorphisme f^{p-1} et on obtient $a_0 f^{p-1}(u) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$$\text{on obtient } a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$$

on applique à ce vecteur f^{p-2} et on obtient $a_1 f^{p-1}(u) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

et ainsi de suite on obtient $a_2 = 0, \dots, a_{p-1} = 0$ donc B est liée

2/ Si $\dim E = p$ alors $\text{Card } B = p = \dim E$, B liée $\Rightarrow B$ base de E

3/ On a : $f^p = 0$ donc $f^p(u) = 0$ car $f(f^{p-1}(u)) = 0$

d'où $f^{p-1}(u) \in \text{Ker } f$

Comme $f^{p-1}(u) = f(f^{p-2}(u)) \in \text{Im } f$ alors $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0\}$ donc $E \neq \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$: la somme n'est pas directe

Exercice 3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1/ \det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1+1) - (0) = 2 \neq 0 \Rightarrow M \text{ est inversible}$$

$$2/ M^2 - M - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$M^2 - M = 2I \quad ; \quad M(M - I) = 2I \quad ; \quad M \left(\frac{1}{2}(M - I) \right) = I$$

$$\text{donc } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3/ \text{ le système s'écrit : } M \cdot X = B \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } X = M^{-1} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3/2 & y = 3/2 \\ & z = 3/2 \end{matrix}$$

IV. Contrôle 07-08

$$1/ \text{ On a } f^2 \neq 0 \quad \text{donc } \exists u \neq 0 / f^2(u) \neq 0$$

$$\text{Soient } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0 \quad (1)$$

$$\text{alors } f^2(\alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u)) = f^2(0)$$

$$\alpha f^2(u) + \beta f^3(u) + \gamma f^4(u) = 0$$

$$\alpha f^2(u) = 0 \quad ; \quad \text{or } f^2(u) \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\text{la relation (1) devient : } \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0$$

$$\text{et on a } f(\beta f(u) + \gamma f^2(u)) = f(0) \Rightarrow \beta f^2(u) + \gamma f^3(u) = 0 \Rightarrow \beta f^2(u) = 0$$

$$f^2(u) \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\text{la relation (1) devient } \gamma f^2(u) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$2/ f(u) = 0 \cdot u + 1 \cdot f(u) + 0 \cdot f^2(u)$$

$$f(f(u)) = f^2(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 1 \cdot f^2(u)$$

$$\Rightarrow M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(f^2(u)) = f^3(u) = 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot f^2(u)$$

V. Contrôle 07-08 et 03-04

1/ $A = \pi(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2/ a/ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0)$

$\alpha(1, 1, -1) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ donc $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ famille libe de \mathbb{R}^3

Or $\dim \mathbb{R}^3 = \text{Card } B' = 3$ donc B' est une base de \mathbb{R}^3

b/ $P = \pi(B \rightarrow B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c/ $\det P = 1$; $\text{Comp } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{Comp } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d/ $A' = \pi(f, B') = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3/ On a $A' = P^{-1}AP \Rightarrow A = PA'P^{-1}$

et $A^n = PA'P^{-1} \cdot P^{-1}A'P^{-1} \cdot PA'P^{-1} \dots PA'P^{-1} = P \cdot A'^n P^{-1}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^n & 2^n & 0 \\ 0 & 5^n & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix}$

4/ Le système s'écrit $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

Si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors on obtient : $X_n = A X_{n-1}$

d'où $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$U_n = 1$ $V_n = 1-2^n + 2 \cdot 2^n = 2^n + 1$, $W_n = 2^n - 1 + 2(5^n - 2^n) + 3 \cdot 5^n$
 $W_n = 5^{n+1} - 2^n - 1$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..